PONTES E FONTES. TRAENDO XEOMETRÍA Á VIDA E VIDA Á XEOMETRÍA

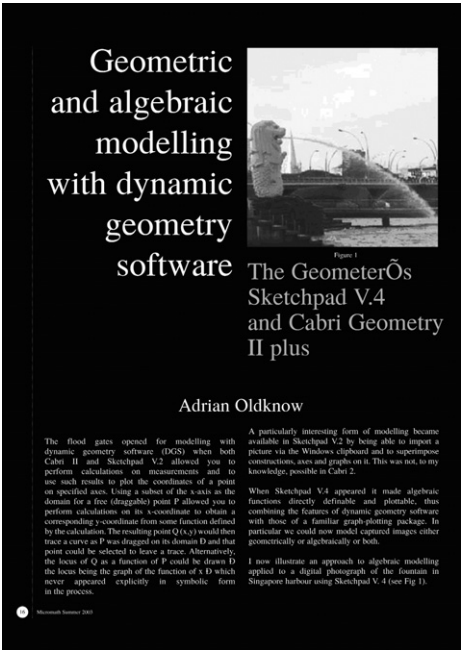
Manuel Díaz Regueiro
IES Xoán Montes

RESUMO

Presento o uso da tecnoloxía para darlle vida á xeometría emparellando fotos de edificios ou construcións reais con cónicas, catenarias, con funcións logarítmicas e parabólicas facendo visible a utilidade das matemáticas e a súa presenza na vida real.

ABSTRACT

I show the use of technology to give life to the geometry relating pictures of actual buildings or constructions with conics, or catenary, parabolic and logarithmic functions making visible the usefulness of mathematics and its presence in real life.



Geometric and algebraic modelling with dynamic geometry software

Figure 1

The GeometerÕs Sketchpad V.4 and Cabri Geometry II plus

Adrian Oldknow

The flood gates opened for modelling with dynamic geometry software (DGS) when both Cabri II and Sketchpad V.2 allowed you to perform calculations on measurements and to use such results to plot the coordinates of a point on specified axes. Using a subset of the x-axis as the domain for a free (draggable) point P allowed you to perform calculations on its x-coordinate to obtain a corresponding y-coordinate from some function defined by the calculation. The resulting point Q (x, y) would then trace a curve as P was dragged on its domain D and that point could be selected to leave a trace. Alternatively, the locus of Q as a function of P could be drawn D the locus being the graph of the function of x D which never appeared explicitly in symbolic form in the process.

A particularly interesting form of modelling became available in Sketchpad V.2 by being able to import a picture via the Windows clipboard and to superimpose constructions, axes and graphs on it. This was not, to my knowledge, possible in Cabri 2.

When Sketchpad V.4 appeared it made algebraic functions directly definable and plottable, thus combining the features of dynamic geometry software with those of a familiar graph-plotting package. In particular we could now model captured images either geometrically or algebraically or both.

I now illustrate an approach to algebraic modelling applied to a digital photograph of the fountain in Singapore harbour using Sketchpad V. 4 (see Fig 1).

Micromath Summer 2003

As películas de éxito teñen remakes, versións novas que aproveitan o tirón do éxito da versión anterior. Pois ben, esta comunicación é un remake dun artigo de Adrian Oldknow en Micromath (2003) usando a xeometría dinámica para modelar xeométrica e alxebricamente. Pero descrito poeticamente, como fai el noutro artigo, "traendo xeometría á vida e vida á xeometría". Efectivamente, como xa teño contado outras veces, é necesario que deixemos de impartir matemáticas "forenses", mortas, baleiras e sen sentido para facelo coas matemáticas que conectan coa vida real. Darlle vida á xeometría, as funcións e as gráficas.

Así que conectar coa vida real, visualizar a abstracción, darlle vida á xeometría (e aínda máis, sobre todo utilizando ferramentas actuais e modernas como as TICs, prestixiosas e prestixiadas polo alumnado), pode ser un camiño interesante a percorrer na busca da súa motivación.

Pero que conta exactamente Oldnow nos seus artigos para que mereza a pena facerlles un remake?

Di que hoxe en día a abundancia de imaxes dixitais en jpeg (procedentes das omnipresentes cámaras dixitais, móbiles, escáneres e da Internet) fai que sexa doado ter unha batería de imaxes de edificios e de construcións singulares, como son as pontes e as fontes, para usar como recurso na aula. Xa que logo, todas esas imaxes poden ser o fondo sobre o que subliñemos as construcións xeométricas ou gráficas que queremos traballar; por exemplo, o semicírculo co que aproximamos o arco dunha ponte, a simetría rotacional da roda dun coche, a ecuación da parábola que produce a auga ao saír dunha fonte, debuxar imaxes precisas de obxectos virtuais sobre cadros ou fotografías coa xeometría proxectiva, ou mesmo obter imaxes para estudar o movemento nun vídeo.

O que si cambiaremos en relación aos seus artigos é a base, o programa sobre o que traballamos: utilizaremos o estándar actual, Geogebra, xa que ademais das vantaxes do propio programa, que nos permite facer o que nos propoñemos, ten a de ser gratuíto. Se no 2003 o estándar para Oldknow era the Geometer's Sketchpad e apenas coñecía Cabri, no ano 2005 foi substituído por este e agora, no 2010, o estándar (definitivo?) é Geogebra. Isto dá unha idea da velocidade coa que "temos que cambiar de mente e de programas": no 2005 e 2006 en Lugo (en AGAPEMA e no Cefore) faciamos cursos de Cabri. No III Congreso presentabamos Cabri como unha novidade, no IV Congreso falábase de Cabri 3D e de Geogebra, e no V Congreso de AGAPEMA do 2010 ninguén fala de Cabri e hai moitos relatorios de Geogebra.

Pois ben, con Geogebra podemos pór de fondo dunha construción xeométrica unha imaxe jpeg facilmente, sen máis que usar a opción *importar Imaxes.*

A tese principal é que o uso das imaxes dixitais permite ao profesor ou profesora de matemáticas presentar unha serie de situacións realistas que os estudantes poden explorar usando a potencialidade dunha ferramenta matemática como Geogebra. Ademais, unha vez construído o modelo de situación a explorar, son os propios estudantes os que poden buscar novas situacións e tarefas, aumentando a súa motivación e conectando as matemáticas cos seus intereses.

Imos ver algunhas propostas:

Calcular a área aproximada da folla dunha árbore, dun país ou do noso concello (despois de dixitalizar un mapa, ou extraéndoo de Google maps), duns terreos familiares seguindo o mapa que nos ofrecen programas como o SIGPAC, ou a superficie queimada no incendio dun bosque.

Queremos calcular a forma das torres da central térmica das Pontes de García Rodríguez e analizar o porqué da mesma ou estudar os hiperboloides de revolución.

Calcular o perfil dun arco da muralla de Lugo como círculo, buscando o centro a través da intersección das mediatrices de dúas cordas.

Estudar as ecuacións dun arco. Dilucidar se os arcos de certas pontes son circulares, parabólicos ou catenarias e estudar o porqué da súa forma.

Estudar as parábolas que produce a auga nas fontes da propia cidade.

Analizar o impacto visual dunha nova construción no seu contorno.

En todo caso, debemos ter en conta que, ás veces, a figura sobre a que traballemos non vai estar encadrada perpendicularmente, de modo que a ecuación resultante non será a óptima.

Ao tempo que estamos traballando coas matemáticas en contexto, estas tarefas contribúen ao desenvolvemento da competencia matemática, pois:

- O concepto de competencia matemática está intimamente relacionado co **punto de vista funcional das matemáticas,** que ten que ver con (OCDE):
  - as matemáticas como "modo de facer"
  - a utilización de ferramentas matemáticas
  - o coñecemento matemático en funcionamento
- Posuír **competencia matemática** significa: ***posuír habilidade para comprender, xulgar, facer e usar as matemáticas nunha variedade de contextos intra e extra matemáticos e situación nas que as matemáticas xogan ou poidan ter un protagonismo (Niss, M.)***
- Descartamos a mera aprendizaxe de coñecementos e procedementos matemáticos en si mesmos, poñendo a énfase sobre a **aplicación a situacións da vida real**
- Entraña a capacidade e a vontade de **utilizar modos matemáticos de pensamento** (pensamento lóxico e espacial) **e representación** (fórmulas, modelos, construcións, gráficos e diagramas)
- A comprensión e os coñecementos como medios e non como fins ou metas do proceso conducen á alfabetización satisfactoria, e esta maniféstase en termos de **competencias**

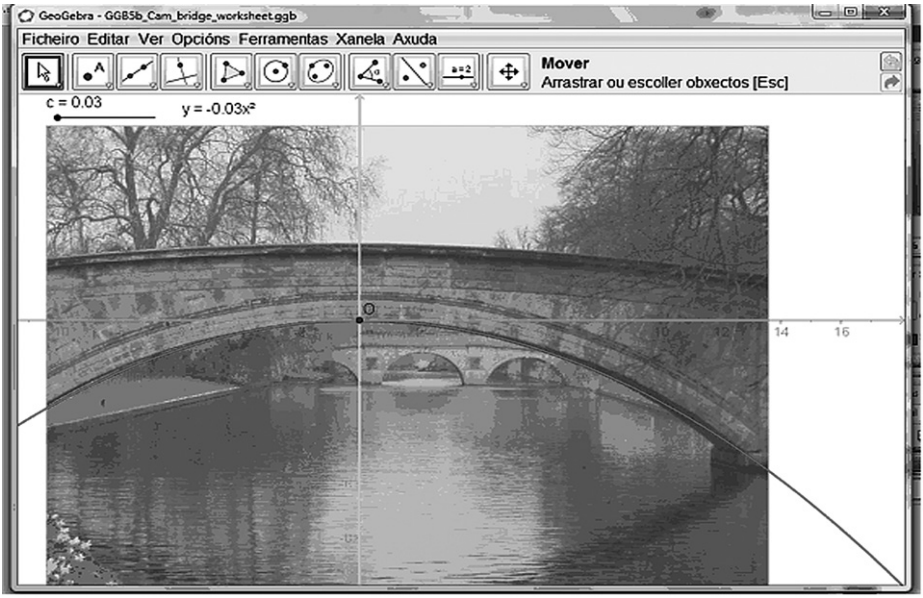
Cómo se adquiren, desenvolven e consolidan as competencias matemáticas específicas e a súa contribución ás competencias básicas?

- Aprendendo a matematizar ou "facer matemáticas"
- Mediante tarefas e situacións didácticas adecuadas
- Organizadas en procesos didácticos ben planificados

Parábolas

A traxectoria dun proxectil lanzado dende o nivel do chan, sen ter en conta a resistencia do aire, describe unha parábola. Esta propiedade foi demostrada por Galileo Galilei no século XVI. As fontes son un caso particular.

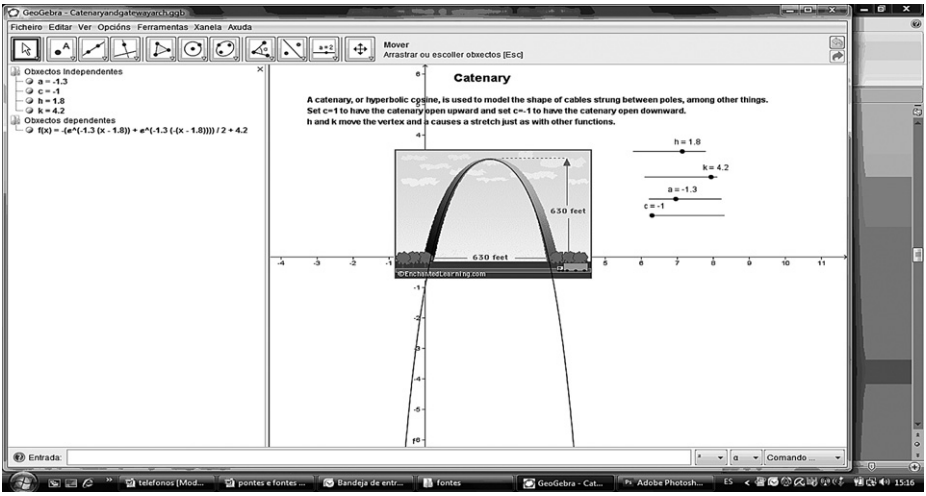
As parábolas das pontes



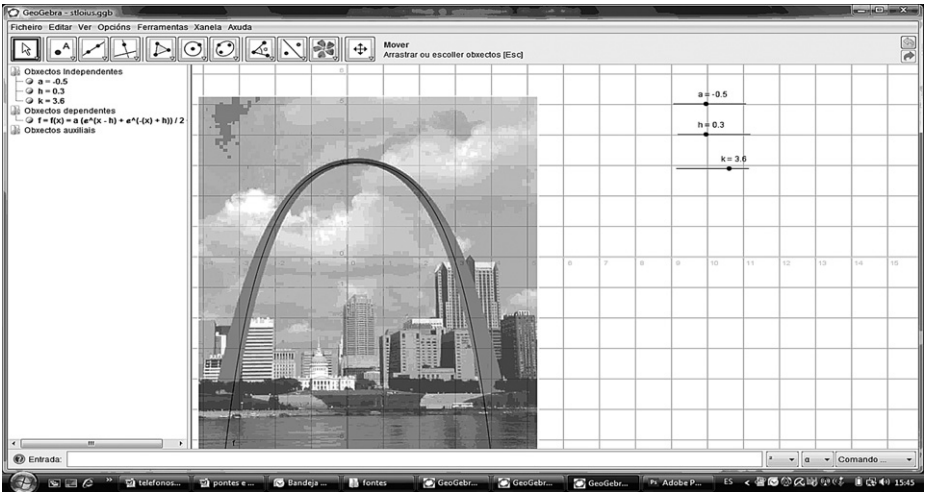
A ponte do río Cam de Oldknow

Catenarias

Unha das aplicacións máis emblemáticas da catenaria é o arco Gateway en Saint Louis, Missouri (E.U.A.), cuxas seccións son catenarias. Este arco mide 630 pés de ancho e de altura.



Manexando os catro parámetros da función Función[c (*e*^(a (x - h)) + *e*^(a (-(x - h)))) / 2 + k conseguimos a función que se corresponde co arco Gateway.



Con tres parámetros achegámonos tamén ao arco Gateway, con menor precisión, usando a función f(x) = a (*e*^(x - h) + *e*^(-(x) + h)) / 2 + k

O tellado da igrexa de pedra en Mision Carmel, California, ten seccións en forma de Catenaria. Tamén está presente en moitas obras de Gaudí

A catenaria é a curva que adopta un cable sostido nos seus extremos debido ao seu propio peso. Por exemplo, os cables de transmisión de enerxía eléctrica suspendidos entre dous postes, un varal de roupa suspendido, ou a forma asumida por unha cadea colgada por dous puntos.

Por outra banda, a curva que adopta un cable é unha parábola cando, desprezando o seu propio peso, soporta unha carga uniformemente distribuída. Véxase a ponte de San Francisco: o Golden Gate. A forma parabólica permite soster un peso uniforme horizontal de tal forma que exista unha tensión uniforme en cada un dos puntos.

Na ponte colgante, os cables, ademais do seu propio peso teñen que soportar o da plataforma. Polo tanto, a forma exacta dos cables é unha combinación da catenaria e da parábola. A diferenza entre as dúas curvas é moi pequena. Se un varal (ou un cable de suspensión) ten colgados pesos uniformemente distribuídos por unidade de lonxitude da curva, entón a catenaria vaise converter na forma de "parábola". Isto é o que ocorre nas pontes colgantes.

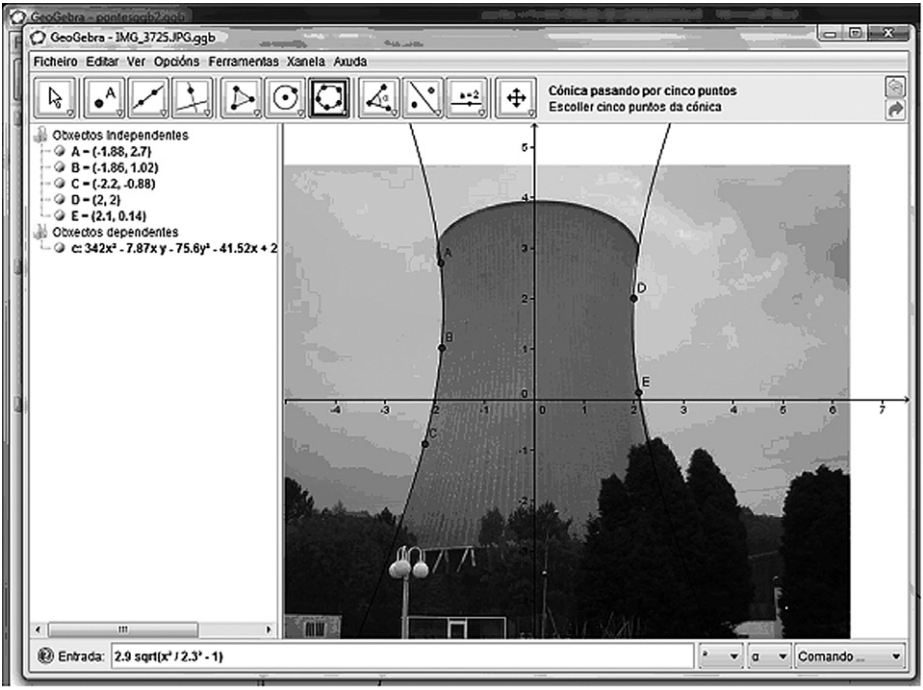
En realidade, moitas veces os enxeñeiros nos seus cálculos asumen que a catenaria é aproximadamente unha parábola, dada a sinxeleza da ecuación da parábola fronte a ecuación da catenaria.

Trátase pois, nestes exercicios con Geogebra, de conseguir distinguir a catenaria da parábola.

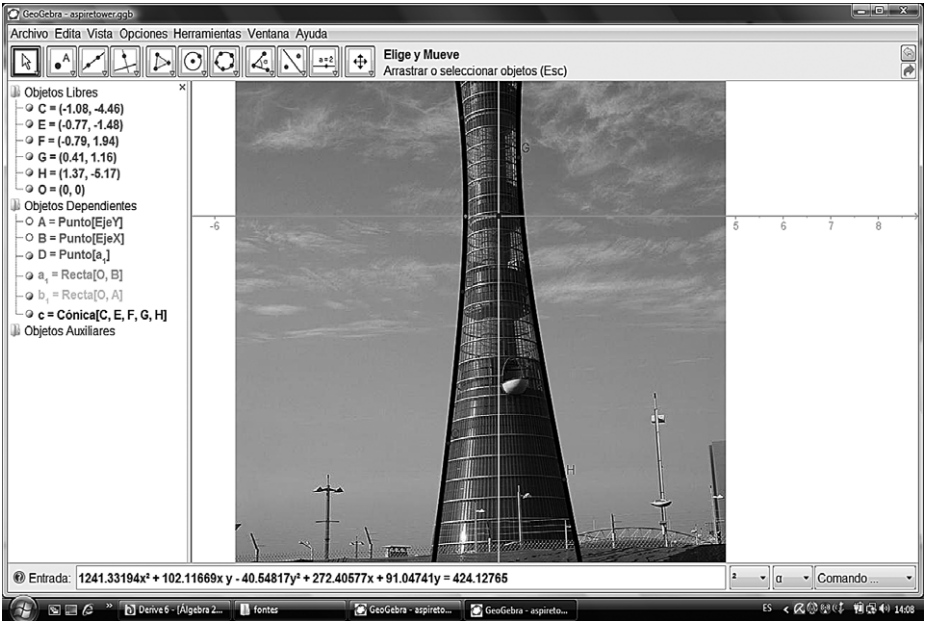
As hipérboles

Comezamos pola hipérbole das torres de refrixeración da central térmica das Pontes.

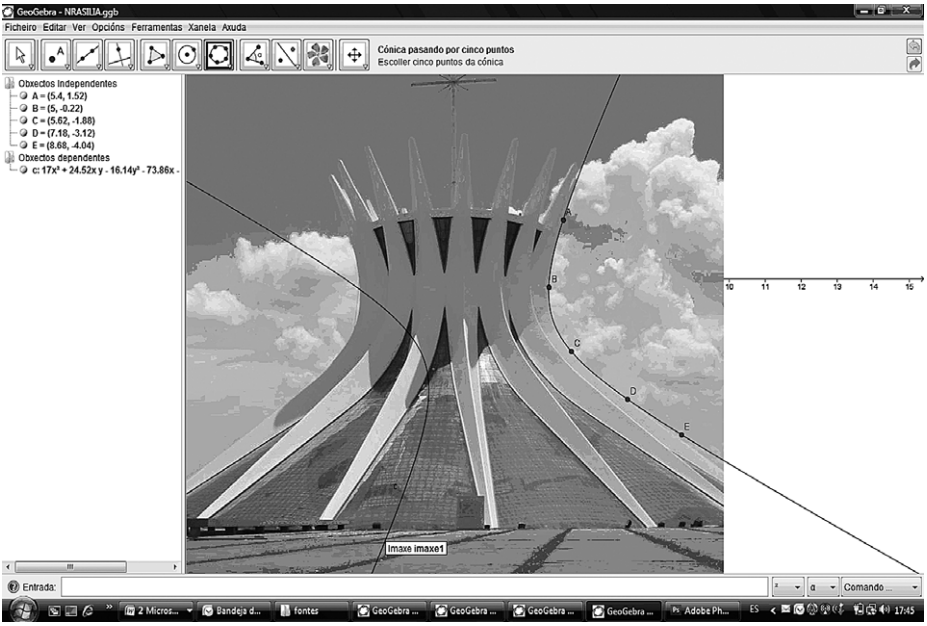
A súa forma característica débese só a razóns estruturais; co hiperboloide pódense construír estas estruturas tan grandes, con menos material, sen paredes tan grosas, pero capaces de soportar o vento. Conseguen converter parte da carga vertical do peso da torre nunha compresión ao ancho da mesma. Isto contribúe á rixidez e levedade da estrutura, dado que esta superficie de dobre curvatura permite que sexa unha lámina delgada.



A torre de refrixeración da central térmica das Pontes de García Rodríguez

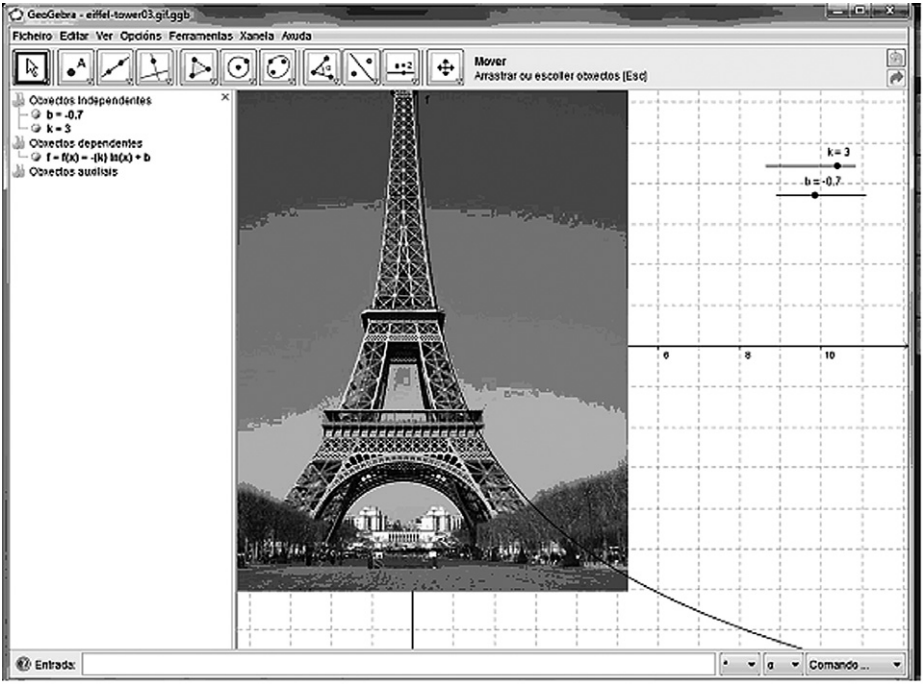


A Aspire Tower de Qatar



A catedral de Brasilia de Niemeyer e a hipérbole

A función logarítmica



Aproximando o perfil da torre Eiffel por unha función logarítmica: f(x) = -(k) ln(x) + b. Este exemplo é consecuencia directa da lectura do libro de Banks, no que podemos atopar por qué iso é así.

As instrucións de Geogebra que usamos nestes exercicios son realmente moi poucas:

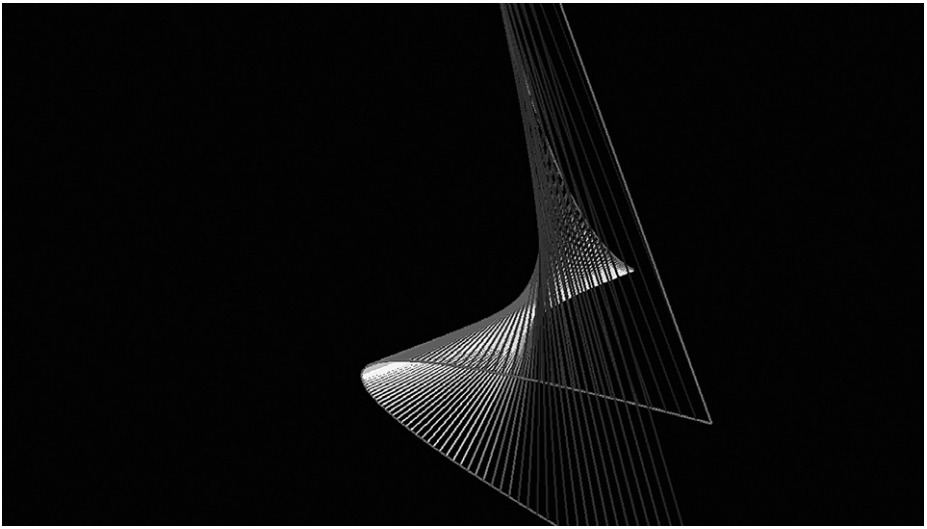
INSERTAIMAGEN
Cónicas
Cónica dado cinco de sus puntos
Circunferencia

Só con Geogebra?

Chegados a este punto podemos preguntarnos se para realizar o que vimos anteriormente a única ferramenta é Geogebra. Pódovos adiantar que a miña resposta é que non. Con linguaxes de programación máis abertos é posible facer as mesmas cousas, evidente-

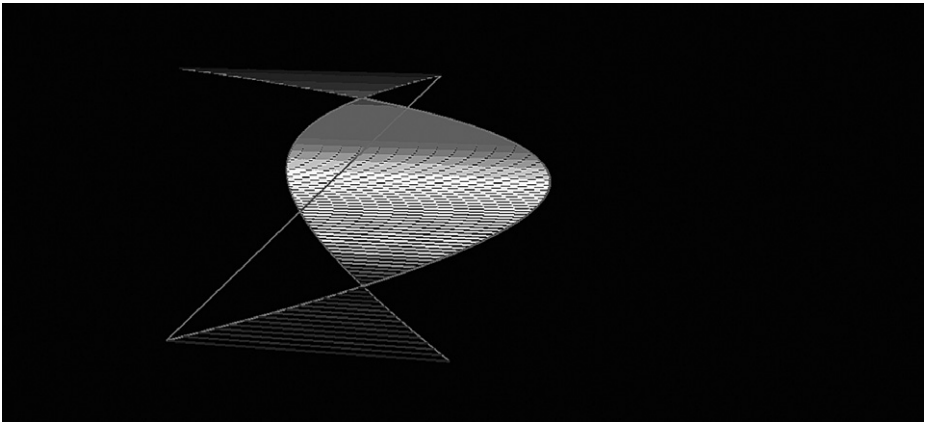
mente non coa mesma rapidez, pero si con maior profundidade, con opcións máis amplas. Entón, para mostrar esa posibilidade creei un programa en Delphi para facer o mesmo e, aínda, con maiores posibilidades como dar o resultado en mínimos cadrados para unha función ou estimación calquera. Con outros consigo xogar artisticamente coa parábola en 3d ou ver un hiperboloide de revolución 3d, como podedes apreciar nas seguintes imaxes:

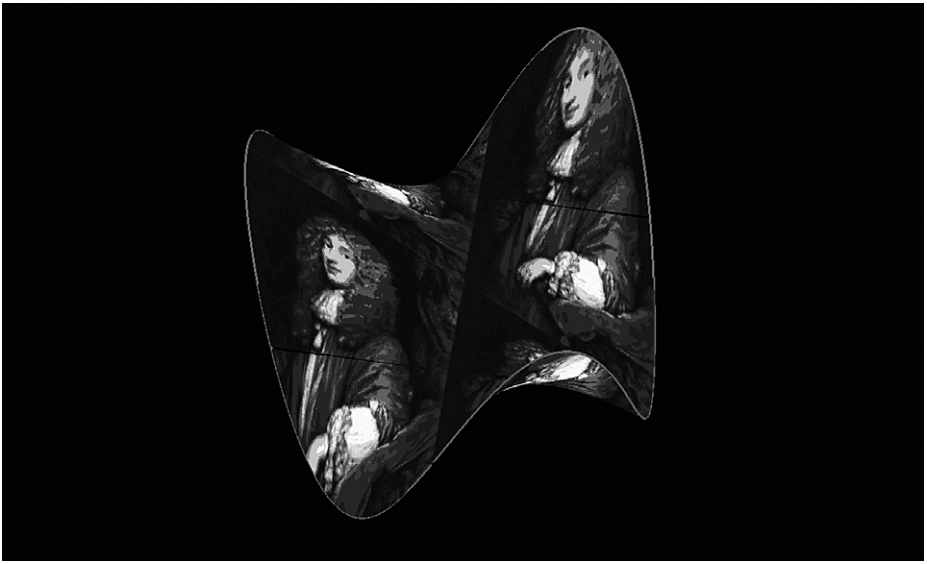
Xogar coa parábola en 3D



Imaxe obtida unindo as curvas (5,t^2,t) e (t^2,5, exp(t)+exp(-t))

Esta outra figura unindo as curvas (5,t^2,t) coa (t^2,5, t)





(Sin(t),cos(t),sin(3t)) fronteira da superficie mínima coa imaxe de Huygens

BIBLIOGRAFÍA

Bryant, John and Chris Sangwin.(2008) *How round is your circle? Where engineering and mathematics meet.* Princeton University Press.

Banks, Robert (1998) *Towing icebergs, Falling Dominoes and other adventures in applied mathematics.* Princeton University Press.

Johnmann, Carol and Elizabeth J Rieth (1999). *Bridges!.* Williamson Books, Canada.

Oldknow, Adrian (2003,2005). Geometric and algebraic modeling with dynamic geometry software. The Geometer's Sketchpad V.4 and Cabri Geometry II plus. *Moving on with Dynamic Geometry.* (2005) ATM. *Micromath* (2003)

Oldknow, Adrian (2005). Bringing geometry to life and life to geometry. Cabri Geometry and digital images. *Moving on with Dynamic Geometry.* (2005) ATM.

Ortega Tomás (2005). *Conexiones Matemáticas. Graó*

http://geometriadinamica.es/Geometria/Arte/Arcos.html